Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2015
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Groupement académique 2

Première partie (13 points)

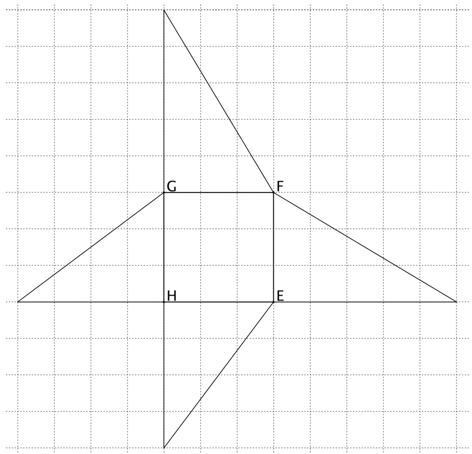
A. Réalisation d'un patron de la pyramide

1. a) ABCDEFGH étant un pavé droit, les triangles DHE et DHG sont rectangles en H. Il en résulte, selon le théorème de Pythagore, que $DE^2 = DH^2 + HE^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

Il en résulte que $DE = 15$, la longueur DE mesure 15 cm.
On montre de la même façon que la longueur DG mesure également 15 cm.

b) Le triangle DGF est rectangle en G. DEF est rectangle en E.
Justification (elle n'était pas demandée aux candidats) : ABCDEFGH est un pavé droit, l'arête [GH] est donc perpendiculaire à la face CDHG. Elle est donc perpendiculaire à toute droite passant par G et contenue dans le plan de la face CDHG, en particulier à la droite (GD).

2. *Le patron ci-contre n'est pas à l'échelle demandée, pour qu'il le soit les carrés du quadrillage devraient avoir un côté de 1 cm.*



3.

B. Étude d'un cas particulier

1. JKLM est un carré, en effet la pyramide DJKLM est selon l'énoncé une réduction de la pyramide DEFG. La base de cette dernière étant un carré (c'est un rectangle puisque c'est une face d'un pavé droit, et deux côtés consécutifs ont la même longueur), il en est de même pour la base de la pyramide réduite.

2. JH = 2 cm donc DJ = 12 cm - 2 cm = 10 cm. le coefficient de la réduction qui transforme la pyramide DEFGH en DJKLM est donc $\frac{10}{12}$ ou $\frac{5}{6}$.

Les longueurs JK et JM s'obtiennent en multipliant par ce coefficient les longueurs HE et HG.
Elles mesurent donc $\frac{5}{6} \times 9cm$ soit 7,5 cm.
Remarque : il était également possible de calculer ces longueurs à l'aide du théorème de Thalès.

3. En appliquant à la pyramide DEFGH la formule de calcul de volume d'une pyramide, on obtient :
$\frac{1}{3} \times 9 \times 9 \times 12 = 324$. Le volume de cette pyramide est donc de $324\ cm^3$.
Dans une réduction, les volumes sont multipliés par le cube du coefficient, le volume de la petite pyramide, c'est à dire le volume de sable blanc est donc : $324\ cm^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 187,5\ cm^3$

Le volume de sable rouge est la différence entre les volumes des deux pyramides, il est donc égal à :
$324\ cm^3 - 187{,}5\ cm^3 = 136{,}5\ cm^3$

C. Étude du cas général

1. x est compris entre 0 et 12. *les cas limites correspondent aux situations où la pyramide est remplie par une seule couleur de sable : si x = 0, tout le sable est blanc, si x = 12, tout le sable est rouge.*

2. a) Si la hauteur de sable rouge est de 5 cm, on lit sur le graphique que le volume de sable blanc est d'environ $64\ cm^3$ et le volume de sable rouge d'environ $260\ cm^3$ *(ce qui est cohérent avec le volume total de la pyramide de* $324\ cm^3$).

b) Si la hauteur de sable blanc est de 5 cm, la hauteur de sable rouge est de 7 cm. On lit alors que le volume de sable blanc est d'environ $24\ cm^3$ et le volume de sable rouge d'environ $300\ cm^3$.

c) Les volumes des deux sables sont égaux pour une hauteur de sable rouge comprise entre 2 cm et 3 cm.

3. a) En reprenant le raisonnement de la question B2 avec une hauteur de sable rouge égale à x et non plus à 2, on obtient un coefficient de réduction égal à $\dfrac{12-x}{12}$

Le volume B(x) de la petite pyramide est donc égal à $324 \times \left(\dfrac{12-x}{12}\right)^3 = \dfrac{324}{12^3}(12-x)^3 = 0{,}1875(12-x)^3$.

b) Si x = 5, on a donc $B(x) = 0{,}1875(12-5)^3 = 0{,}1875 \times 7^3 = 64{,}3125\ cm^3$

Quand la hauteur de sable rouge est de 5 cm, le volume de sable blanc est de $64{,}3125\ cm^3$ et celui de sable rouge est de $324\ cm^3 - 64{,}3125\ cm^3$ soit $259{,}6875\ cm^3$.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

Le nombre de litres d'eau qui ont coulé pendant ces 10 jours est de $10 \times 24 \times 60 \times 3$ soit 43200 litres.
Un mètre cube étant égal à 1000 décimètres cubes, soit 1000 litres, il a coulé 43,2 mètres cubes d'eau.
Le coût de la négligence est donc de $43{,}2 \times 3{,}5$ soit 151,20 €.

Exercice 2

Le tableau suivant montre tous les tirages possibles. Il montre que 6 tirages donnent une somme de 7 alors que 4 seulement donnent une somme de 5. Les probabilités ne sont donc pas égales.

Premier dé

Second dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Exercice 3

Le salaire moyen des femmes étant de 1700 €, les femmes gagnent en tout 5100 € par mois
La somme des salaires des hommes est de 7450 €

Comme après l'embauche il y aura autant d'hommes que de femmes, pour que le salaire moyen des hommes et celui des femmes soient égaux, il faut que la somme des salaires des hommes soit égale à la somme des salaires de femmes, il faut donc que la nouvelle recrue perçoive un salaire mensuel de 2350 €.

Exercice 4

Le nombre de bouquet doit être un diviseur du nombre de tulipes ainsi que du nombre de roses, c'est donc un diviseur commun à 12 et 18.
Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Les diviseurs communs à 12 et 18 sont donc 1, 2, 3 et 6.

Le fleuriste peut donc faire :
- un seul bouquet de 12 tulipes et 18 roses (*faut-il exclure cette possibilité à cause du pluriel dans l'énoncé ?*)
- 2 bouquets avec chacun 6 tulipes et 9 roses,
- 3 bouquets avec chacun 4 tulipes et 6 roses,
- 6 bouquets avec chacun 2 tulipes et 3 roses.

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. Question extrêmement surprenante, je ne suis pas certain de ce que le jury attend, voici quelques considérations possibles :

Dans cet exercice, les fractions sont utilisées pour définir des longueurs à partir d'actions (pour prendre les 3/4 d'une longueur, on découpe cette longueur en 4 parties égales puis on prend 3 parties). Ceci semble indiquer que les fractions sont des opérateurs.
Cependant, c'est pratiquement le seul point de vue existant sur les fractions à l'école élémentaire, et si on considère qu'il ne s'agit alors pas de nombres, on voit mal la cohérence qu'il y a à introduire l'écriture à virgule des **nombres** décimaux à partir des fractions *(un point de vue différent est défendu dans le document « le nombre au cycle 3 », mais la connaissance de ce document ne me semble pas pouvoir être attendue des candidats).*
Par ailleurs, les actions décrites ci dessus utilisent des opérateurs entiers, (diviser par 4, multiplier par 3) il n'y a pas à proprement parler d'opérateur fractionnaire (les opérations avec les fractions ne sont introduites qu'au collège)…

2. a) Eva semble avoir acquis la méthode de calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle.

Il en va de même pour Maxime même si les données utilisées sont fausses (interprétation de 3/4 comme signifiant 3,4) et les opérations également.

Jeanne semble avoir acquis que le périmètre est la longueur du tour de la figure (il y a cependant un problème puis qu'elle compte 12 unités qui ne sont pas toutes égales) et que l'aire peut être déterminée en dénombrant des figures identiques qui recouvrent la figure.

b) Eva calcul correctement les 3/4 de 60 en partageant 60 en quatre parts égales (partage dont témoigne l'écriture 60 = 15 + 15 + 15 + 15) et en prenant 3 de ces parts. Elle réitère correctement cette procédure pour les 4/5 de 50. Elle semble donc avoir bien compris ce que signifie une fraction.

c) Maxime interprète 3/4 comme signifiant 3,4.

3. Pour les dimensions choisies, les calculs des 3/5 de la largeur et des 3/4 de la longueur sont faciles, mais les dimensions choisies ne permettent pas aux enfants de dessiner la plaque initiale en vraie grandeur sur leur cahier. Il est donc impossible d'effectuer le partage sur le dessin et de mesurer ensuite les dimensions obtenues pour le rectangle à découper.

Les dimensions 10 cm et 16 cm permettent également un calcul facile avec des entiers, mais peuvent donner lieu à une procédure s'appuyant sur le dessin de la plaque initiale, particulièrement si les élèves disposent de papier quadrillé à carreaux de 5 mm de côté.

Les dimensions 10 cm et 14 cm permettent comme les précédentes l'usage du dessin, mais conduisent à une dimension non entière pour le rectangle découpé (le quart de 14 cm, c'est 3,5 cm, trois quarts de 14 cm c'est 10,5 cm) ce qui est plus difficile à trouver, et rendrait également plus difficiles les calculs d'aire et de périmètre demandés.

Situation 2

1. Pour résoudre cet exercice, il faut :
- Savoir que la boîte a 6 faces.
- Savoir que les faces opposées sont superposables.
- Savoir que les segments parallèles aux arêtes matérialisées par les parties de ficelle ont la même longueur que les arêtes.

Remarque : il n'était demandé que deux pré-requis.

2. a) L'étape 120 - 28 = 92 permet de calculer la longueur totale de ficelle sur les faces de la boîte (c'est à dire nœud exclu).
Les trois étapes suivantes consistent à calculer la longueur totale des 4 segments de ficelle horizontaux.
La dernière ligne de calcul consiste à déterminer la longueur totale des segments verticaux, puis celle d'un de ces segments (qui est la hauteur de la boite).

b) L'élève commet une erreur en considérant qu'il n'y a que deux segments verticaux alors qu'il y en a quatre. Il aurait donc du diviser 36 par 4 et non par 2.
Par ailleurs sa dernière ligne de calcul n'utilise pas correctement l'égalité, il aurait pu écrire la même chose en deux étapes : 92 - 56 = 36 puis 36 : 2 = 18.
Enfin, il oublie de calculer le volume (le fait qu'il ait jugé utile de calculer la hauteur de la boite laisse supposer qu'il sait calculer le volume).

Situation 3

1. Cet exercice permet de revenir sur la proportionnalité.

2. Première méthode : Puisque 10 crêpes coûtent 14 € et 5 crêpes 7 €, 15 crêpes (c'est à dire 10 + 5) coûtent 14 € + 7 € soit 21 €. Il s'agit de la propriété de linéarité, sous son aspect additif.

Deuxième méthode : Puisque 5 crêpes coûtent 7 €, 15 crêpes (c'est à dire 5 × 3) coûtent 7 € × 3 soit 21 €. Il s'agit toujours de linéarité, mais dans son aspect multiplicatif.

Troisième méthode : Puisque 10 crêpes coûtent 14 €, une crêpe coûte 10 fois moins, soit 1,40 € et 15 crêpes coûtent 15 fois plus qu'une crêpe, soit 1,40 € × 15 ou 21 €. Il s'agit toujours de linéarité, mais avec l'utilisation d'un retour à l'unité sous la forme dite « règle de trois ».